Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 7

Énergétique des fluides en écoulement stationnaire – TD

Exercice 1 : Questions de cours

Pour un fluide parfait de masse volumique ρ en écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite, on définit :

- le système Σ constitué des particules de fluide contenues dans un tube de courant entre la section S_e et la section S_s ;
- le système Σ_e de volume $\mathrm{d}V_\mathrm{e}$ constitué des particules de fluide qui entrent dans le système Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$;
- le système Σ_s de volume $\mathrm{d}V_\mathrm{s}$ constitué des particules de fluide qui sortent du système Σ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$;
- le système Σ' tel que : $\begin{cases} \Sigma'(t) = \Sigma_\mathrm{e} + \Sigma \\ \Sigma'(t+\mathrm{d}t) = \Sigma + \Sigma_\mathrm{s} \end{cases}$.

1. Justifier que le système Σ' est un système fermé.

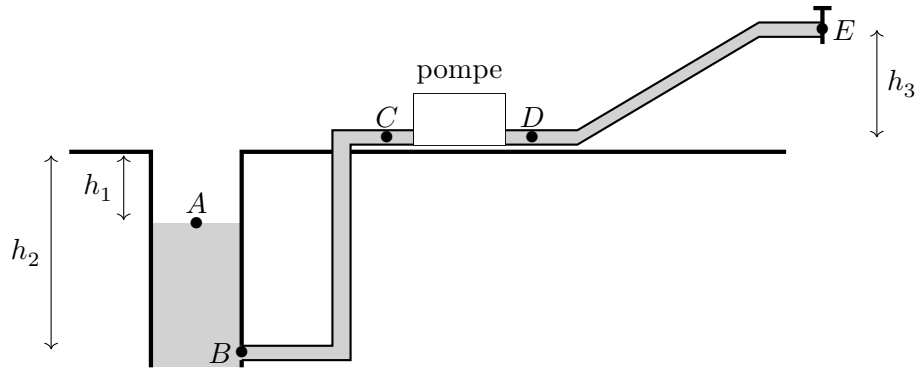
2. Exprimer les volumes $\mathrm{d}V_\mathrm{e}$ et $\mathrm{d}V_\mathrm{s}$ en fonction du débit volumique.

3. Établir la relation de Bernoulli en appliquant le théorème de l'énergie mécanique au système Σ' entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Captage d'eau au fond d'un puits

Un dispositif de captage d'eau au fond d'un puits pour une installation domestique est constitué d'une pompe connectée à un circuit d'aspiration et à un circuit de refoulement.

- Le circuit d'aspiration BC assure la prise d'eau au point B au fond du puits de profondeur $h_2 = 6{,}0\,\mathrm{m}$ à l'aide d'une canalisation cylindrique de diamètre $d_1 = 40\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L_1 = 6{,}5\,\mathrm{m}$. Le point A à la surface de la réserve d'eau est supposé immobile et à la pression atmosphérique $P_A = P_\mathrm{atm} = 1{,}0\,\mathrm{bar}$, il se trouve à une profondeur $h_1 = 4{,}5\,\mathrm{m}$ du sol.
- Le circuit de refoulement DE à la sortie de la pompe permet de distribuer l'eau jusqu'au point E où un robinet nécessite une pression $P_E = P_\mathrm{atm} + P_\mathrm{u}$, avec $P_\mathrm{u} = 2{,}5\,\mathrm{bar}$ la surpression utile. La canalisation cylindrique de diamètre $d_2 = 32\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L_2 = 6{,}0\,\mathrm{m}$ présente une dénivellation $h_3 = 3{,}5\,\mathrm{m}$.



On souhaite déterminer la puissance d'alimentation électrique de la pompe permettant d'obtenir un débit volumique $D_\mathrm{V} = 6{,}0\,\mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$ en régime stationnaire au niveau du robinet. On suppose pour cela que l'eau est un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$.

Dans un premier temps, on suppose que l'écoulement est parfait, c'est-à-dire sans perte de charge.

1. Calculer la vitesse moyenne v_1 dans le circuit d'aspiration et la vitesse moyenne v_2 dans le circuit de refoulement.

2. À l'aide de la relation de Bernoulli en présence d'un élément actif, exprimer le travail massique w_p que doit fournir la pompe en fonction de h_1, h_3, g, v_2, P_u et ρ.

3. En déduire la puissance que doit fournir la pompe à l'écoulement.

On souhaite maintenant prendre en compte les pertes de charge dans l'écoulement. On rappelle que le nombre de Reynolds pour un écoulement d'eau à la vitesse v dans une conduite de diamètre d est défini tel que :

$$Re = \frac{v\,d\,\rho}{\eta}$$

avec $\eta = 1{,}0.10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$ la viscosité dynamique de l'eau.

4. Calculer le nombre de Reynolds pour l'écoulement d'aspiration et pour l'écoulement de refoulement.

Pour un écoulement dont le nombre de Reynolds est inférieur à 10^5, on peut estimer les pertes de charge régulières dans une conduite de longueur L par la formule suivante :

$$\Delta P^* = \frac{L\,v^2}{6\,d}\,Re^{-0{,}25}.$$

5. Calculer les pertes de charge régulières dans ce dispositif.

On admet que les pertes de charge singulières dans chaque circuit peuvent se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta P^* = K\,\frac{v^2}{2}$$

avec $K = 0{,}9$ pour le circuit d'aspiration et $K = 1{,}2$ pour le circuit de refoulement.

6. Calculer les pertes de charge singulières dans ce dispositif.

7. En tenant compte de l'ensemble des pertes de charge, déterminer la puissance réelle que doit fournir la pompe à l'écoulement, puis comparer ce résultat au cas d'un écoulement parfait.

8. Sachant que la pompe possède un rendement de 70%, déterminer la puissance d'alimentation électrique nécessaire.

Exercice 3 : Vidange d'un réservoir

On considère une cuve cylindrique de récupération d'eau de pluie, de diamètre $a = 50\,\mathrm{cm}$, remplie jusqu'à une hauteur $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$. La surface libre de l'eau, située à l'altitude z, est en contact avec l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. La cuve se vide par un trou de diamètre $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ percé à sa base en $z = 0$.

On considère dans un premier temps que la hauteur d'eau dans la cuve ne varie presque pas au cours du temps, l'écoulement est alors stationnaire.

1. Justifier cette approximation.

2. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

3. En considérant que ces conditions sont vérifiées, déterminer la vitesse v_0 de l'eau en sortie de la cuve.

4. Calculer le temps qu'il faut pour remplir un arrosoir de 15 L placé sous le trou.

On souhaite maintenant déterminer le temps nécessaire pour vider entièrement la cuve à travers le trou.

5. Montrer que la hauteur d'eau $z(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{d^2}{a^2}\,\sqrt{2\,g\,z(t)}$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

6. Calculer le temps de vidange de la cuve.

Un tuyau horizontal de longueur $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et de diamètre $D = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ est raccordé à la sortie de la cuve remplie. On peut estimer la perte de charge dans ce tuyau avec la formule de Blasius :

$$\Delta P^* = 0{,}016 \times \frac{1}{2}\,\rho\,v_0^2\,\frac{L}{D}$$

avec ρ la masse volumique de l'eau.

7. Calculer la perte de charge dans ce tuyau.

8. Déterminer la vitesse de l'eau en sortie du tuyau lorsque la cuve est remplie.

Exercice 4 : Coefficient de portance du Sky-Sailor

Le Sky-Sailor est un prototype d'avion autonome conçu pour voler sur Mars. Son maintien en vol est assuré par une force aérodynamique, appelée force de portance, dont l'expression est :

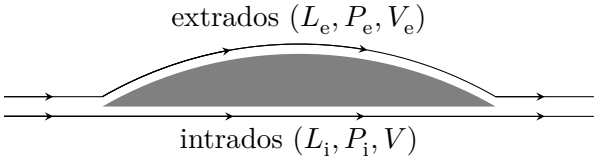
$$\overrightarrow{F_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,\rho\,S\,C_\mathrm{p}\,V^2\,\vec{e}_z$$

avec ρ la masse volumique de l'atmosphère martienne, S la surface de ses ailes, C_p une constante appelée coefficient de portance, V sa vitesse horizontale, et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire ascendant.

1. Déterminer la dimension du coefficient de portance C_p.

Une coupe de profil d'une aile du Sky-Sailor est présentée ci-dessous. La surface supérieure de son aile est appelée extrados, tandis que la surface inférieure est appelée intrados. On note :

- L_e (respectivement L_i) la longueur de l'extrados (respectivement de l'intrados) ;
- P_e (respectivement P_i) la pression immédiatement au-dessus de l'extrados (respectivement en dessous de l'intrados) ;
- V_e la vitesse immédiatement au-dessus de l'extrados, et on suppose que la vitesse immédiatement en dessous de l'intrados est constante et égale à V.



2. Exprimer la norme de la force de portance s'exerçant sur l'aile en fonction de P_i, P_e et S.

Dans le cadre d'un modèle simple, on admet que le temps mis par les particules de fluides pour parcourir le trajet le long de l'extrados est identique à celui pour parcourir le trajet le long de l'intrados.

3. Déterminer une relation entre V_e, V, L_e et L_i.

4. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

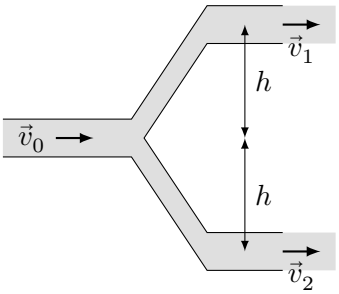
On suppose que ces conditions sont vérifiées pour la suite, et négligera la variation d'altitude liée à l'épaisseur de l'aile.

5. Déterminer l'expression du coefficient de portance C_p en fonction de L_e et L_i.

6. Sachant que l'extrados du Sky-Sailor est 2% plus long que son intrados, calculer numériquement C_p.

Exercice 5 : Répartition d'une distribution hydraulique

Une conduite principale de section $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ dans laquelle circule de l'eau avec un débit volumique $D_\mathrm{V} = 5{,}0\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ se sépare en deux conduites secondaires, chacune également de section S, après une fourche de séparation. On considère que l'eau est un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible. Les deux conduites secondaires débouchent sur l'air libre à la pression atmosphérique.



On considère dans un premier temps que le dispositif est horizontal. Toutes les conduites sont alors à la même altitude, et cela revient à négliger l'effet de la pesanteur.

1. Calculer les vitesses v_1 et v_2 du fluide dans les conduites secondaires.

On considère maintenant que le dispositif est vertical. Chaque conduite secondaire présente alors une différence d'altitude $h = 30\,\mathrm{cm}$ avec la conduite principale.

2. Déterminer une première relation liant les vitesses v_1 et v_2 en effectuant un bilan de débit.
3. Déterminer une seconde relation liant les vitesses v_1 et v_2 en utilisant la relation de Bernoulli.
4. En déduire les valeurs des vitesses v_1 et v_2.
5. Calculer le rapport des deux débits en sortie, puis conclure sur l'effet de la gravité sur ce dispositif.